ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

o0o

ĐỖ THỊ NGUYÊN

TỔNG TỪNG PHẦN VÀ ỨNG DỤNG VÀO BÀI TOÁN CHUỖI

THÁI NGUYÊN - 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

o0o

ĐỖ THỊ NGUYÊN

TỔNG TỪNG PHẦN VÀ ỨNG DỤNG VÀO BÀI TOÁN CHUỖI

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

GIÁO VIÊN HƯỚNG DẪN
PGS.TS. TRỊNH THANH HẢI

THÁI NGUYÊN - 2018

Mục lục

Danh mục các ký hiệu, các chữ viết tắt

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} b_j = b_2.b_3...b_n + b_1.b_3...b_n + b_1.b_2b_4...b_n + ... + b_1.b_2.b_3...b_{n-1}$$

BĐT: Bất đẳng thức

CBS: Cauchy - Buniakowski - Schwarz

K.L. Chung: Kai Lai Chung

AM-GM: Trung bình cộng - Trung bình nhân

NXBGD: Nhà xuất bản giáo dục

SGK: Sách giáo khoa

Lời nói đầu

Tổng từng phần là một khái niệm rất mới mẻ đối với học học sinh phổ thông và cũng như sinh viên. Nó không được giảng dạy ở trường phổ thông. Và sinh viên cũng chỉ tiếp cận khi tham khảo thêm bên ngoài giáo trình. Việc áp dụng tổng từng phần vào bài toán chuỗi là một vấn đề chưa được khai thác nhiều trong phổ thông cũng như đại học. Những bài toán về chuỗi cũng rất phong phú và đa dạng. Những ai mới bắt đầu làm quen về chuỗi thường khó hình dung về cấu trúc của nó, đặc biệt là các bài toán về bất đẳng thức chuỗi lại càng phức tạp. Trong những kỳ thi học sinh giỏi quốc gia, thi Olympic toán quốc tế, thi vô địch toán các nước, các bài toán liên quan đến bất đẳng thức chuỗi cũng được đề cập nhiều và thuộc loại khó trong đề. Luận văn với đề tài" Tổng từng phần và ứng dụng vào bài toán chuỗi" có mục đích trình bày chi tiết các bài toán bất đẳng thức chuỗi. Trong luận văn bước đầu đề cập đến tổng từng phần và ứng dụng của tổng từng phần vào bài toán chuỗi. Hy vọng luận văn là một tài liệu tham khảo cho các đọc giả về bài toán chuỗi và vấn đề tổng từng phần. Luận văn gồm 02 chương:

Chương 1: *Kiến thức chuẩn bị.* Trình bày các bài toán liên quan đến bất đẳng thức chuỗi với lời giải chi tiết.

Chương 2: *Tổng từng phần và ứng dụng vào bài toán chuỗi.* Giới thiệu tổng từng phần, bất đẳng thức Abel, bất đẳng thức K.L. Chung. Ý tưởng xây dựng công thức tổng từng phần và ứng dụng của tổng từng phần vào giải một số bài toán về chuỗi trong các kỳ thi học sinh giỏi, thi Olympic. Một số bài toán được đưa ra với nhiều cách giải, trong đó có cách giải áp dụng công thức tổng từng phần. Một kiến thức lạ mà quen.

Để hoàn thành luận văn này, tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và kính trọng tới PGS.TS. Trịnh Thanh Hải, Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, người thầy đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình hoàn thành luận văn này. Qua đây tác giả cũng xin được gửi lời cảm ơn chân thành đến các Thầy Cô đã đọc, đánh giá và cho những ý kiến quý báu để luận văn được phong phú và hoàn thiện hơn. Tác giả cũng xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, Phòng Đào tạo, Khoa Toán - Tin Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi cho tác giả trong suốt quá trình học tập cao học. Cảm ơn Ban giám hiệu và các đồng nghiệp Trường THPT Quế Võ số 1 tỉnh Bắc Ninh đã giúp đỡ cho tác giả trong công tác. Tác giả cũng xin cảm ơn gia đình, bạn bè đã cổ vũ, động viên tác giả vượt qua mọi khó khăn để hoàn thành bản luận văn này. Tuy đã có nhiều cố gắng nhưng do thời gian và khả năng có hạn nên có vấn đề trong luận văn chưa được trình bày sâu sắc và không thể tránh khỏi sai sót trong trình bày, rất mong được sự góp ý của Thầy Cô và các bạn.

Tác giả xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 10 tháng 9 năm 2018

Tác giả

Đỗ Thị Nguyên

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, luận văn trình bày lời giải chi tiết một số bài toán bất đẳng thức về chuỗi thường gặp làm cơ sở để trình bày các vấn đề chương 2.

1.1. Một vài dạng bài tập về bất đẳng thức liên quan đến chuỗi

1.1.1. Một số bất đẳng thức về chuỗi

Trong phần này tác giả nhắc lại một số bất đẳng thức chuỗi hay được dùng trong chương trình phổ thông và được sử dụng để chứng minh các bài toán trong cuốn luận văn này.

Bất đẳng thức 1.1 (Bất đẳng thức CBS)
Cho $2n$ số thực tùy ý $a_1, a_2, ..., a_n$;
$b_1, b_2, ..., b_n$
Khi đó

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = ... = \dfrac{a_n}{b_n}$

Bất đẳng thức 1.2 (Bất đẳng thức AM - GM)
Cho n số thực không âm $a_1, a_2, ..., a_n$. Khi đó:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \geq n.\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n \geq 0$

Bất đẳng thức 1.3 (Bất đẳng thức Chebyshev)
1. *Áp dụng cho 2 dãy ngược chiều*
Cho hai dãy hữu hạn số thực ngược chiều

$$\begin{gathered} a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_n \end{gathered}$$

hoặc

$$\begin{gathered} a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n \end{gathered}$$

Khi đó

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right).\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$$

2. *Áp dụng cho 2 dãy cùng chiều*
Cho hai dãy hữu hạn số thực cùng chiều

$$\begin{gathered} a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n \end{gathered}$$

hoặc

$$\begin{gathered} a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_n \end{gathered}$$

Khi đó

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right).\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$$

Dấu " = " xảy ra ở cả hai dạng trên khi và chỉ khi

$$a_1 = a_2 = ... = a_n$$

hoặc

$$b_1 = b_2 = ... = b_n$$

1.1.2. Một số bài toán về bất đẳng thức chuỗi dành cho học sinh khá, giỏi ở trung học phổ thông

Trong mục này tác giả sẽ trình bày chi tiết các bất đẳng thức chuỗi được tổng hợp từ các tài liệu [1],[3].

Bài toán 1.1 (Toán học tuổi trẻ số 470, năm 2016)
Cho n số thực không âm, $(i = 1, 2, 3, ..., n)$ ($n \geq 2$) thỏa mãn

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1+x_i}\right) < \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{1+x_i^2}. \tag{1.1}$$

Lời giải (Sử dụng BĐT Chebyshev)
Không mất tính tổng quát từ giả thiết ta có thể giả sử:

$$1 \geq x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n \geq 0.$$

Khi đó, với $i < j$ thì $x_i \geq x_j$ và $0 \leq x_i x_j \leq 1$.
Do đó

$$\begin{aligned} \frac{x_i}{1+x_i^2} \geq \frac{x_j}{1+x_j^2} &\Leftrightarrow x_i(1+x_j^2) \geq x_j(1+x_i^2) \\ &\Leftrightarrow x_i + x_i x_j^2 - x_j - x_j x_i^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x_i - x_j) - x_i x_j (x_i - x_j) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x_i - x_j)(1 - x_i x_j) \geq 0 \text{ (hiển nhiên).} \end{aligned}$$

Vậy nên

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} \geq \frac{x_2}{1+x_2^2} \geq ... \geq \frac{x_n}{1+x_n^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức cho hai dãy cùng chiều, ta được

$$n\left(x_1\frac{x_1}{1+x_1^2} + x_2\frac{x_2}{1+x_2^2} + ... + x_n\frac{x_n}{1+x_n^2}\right) \geq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{1+x_k^2}\right).$$

Do $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$ và $0 \leq x_k \leq 1$ nên $\frac{x_k}{1+x_k^2} \geq \frac{x_k}{1+x_k}, k = 1, 2, ..., n.$
Ta có điều phải chứng minh.
Dấu đẳng thức xảy ra khi có một phần tử $x_k = 1$, các phần tử còn lại bằng 0, điều này dẫn đến dấu đẳng thức không xảy ra ở BĐT (1.1).

Bài toán 1.2 (Đề thi vô địch toán Nữu Ước năm 1975)
Khẳng định sau đúng hay sai:
Với các số dương tùy ý $a_1, a_2, ..., a_n$ và $a_{n+1} = a_1$ ta có bất đẳng thức:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i}{a_{i+1}}\right)^n \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i+1}}{a_i}.$$

Lời giải
Kí hiệu $\dfrac{a_i}{a_{i+1}} = b_i, (i = 1, ..., n)$ và đặt $b_{n+1} = 1$.
Khi đó $\prod\limits_{i=1}^{n+1} b_i = 1$. Do đó:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{b_i} &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n+1} \prod\limits_{j \neq i} b_j}{\prod\limits_{i=1}^{n+1} b_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \prod_{j \neq i} b_j \\
&\leq \sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{1}{n} \sum_{j \neq i} b_j^n\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} b_i^n.
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra sự đúng đắn của bất đẳng thức.
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.
Vậy câu trả lời là khẳng định đúng.

Bài toán 1.3 (Toán học tuổi trẻ, số 462, năm 2015)
Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực bất kỳ có tổng bằng 0. Tìm hằng số $C = C(n)$ lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng:

$$C.\sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j|. \tag{1.2}$$

Lời giải (Áp dụng BĐT Chebyshev)
Trong (1.2) cho $a_1 = 1; a_2 = a_3 = ... = a_n = \dfrac{1}{n-1}$ ta được $C \leq \dfrac{n}{2}$.